



# Congreso Internacional de Educaciones, Pedagogías y Didácticas

## Pedagogías críticas latinoamericanas



Tunja - Boyacá

# 2020

Del 6 al 9 de octubre

Experiencias de maestras y maestros

**LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS EN EL APRENDIZAJE DE LAS CÓNICAS  
DESDE EL CONCEPTO DE MÉTRICA: CONSIDERACIONES  
PRELIMINARES DE INVESTIGACIÓN.**

**Autores:**

**Garzón Zipa, Cristian Julián**

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia

**Correo electrónico:** [cristian.garzon@uptc.edu.co](mailto:cristian.garzon@uptc.edu.co)

**Eje temático:** Educación Matemática

Proyecto de investigación: Situaciones Didácticas para el Aprendizaje de las Cónicas desde el concepto de Métrica

**Resumen:** En la actualización de los Derechos Básicos de Aprendizaje [DBA] (DBA, 2016), dados por el Ministerio de Educación Nacional en Colombia, se evidencia un interés por rescatar las propiedades del lugar geométrico para las cónicas. Este concepto, se ha venido minimizando debido al tratamiento que se está dando en las aulas, en donde se prioriza la enseñanza de ecuaciones y algoritmos dejando de lado el componente geométrico-espacial y los procesos cognitivos de tipo intuitivo y empírico característico de estas figuras. Una estrategia interesante para priorizar los lugares geométricos de las cónicas es usar el concepto de métrica (forma de medir), así, se propone diseñar una serie de situaciones didácticas que privilegien esta estrategia para poder responder a la pregunta: ¿Cómo influye en el aprendizaje de las cónicas como lugar geométrico, el diseño de situaciones didácticas desde diferentes métricas? En esta dirección, en el presente trabajo se exponen algunos de los resultados

obtenidos en la fase preliminar de la investigación denominada: *Situaciones Didácticas para el Aprendizaje de las Cónicas desde el concepto de Métrica*, que se está desarrollando en el programa de Maestría en Educación Matemática, en esta fase se realizó un pilotaje con una situación didáctica titulada: "*Midiendo en la ciudad*" donde a partir de la métrica del taxi se deben solucionar problemas de ubicaciones espaciales, esto con el objetivo de tener un primer acercamiento al tipo de análisis manejado por los estudiantes y describir posibles obstáculos en el desarrollo de la actividad.

**Palabras clave:** Cónicas, Métrica, Pensamiento espacial, Situación Didáctica

**Abstract:** In the update of the Derechos Básicos de Aprendizaje [DBA] (DBA, 2016), given by the Ministry of National Education in Colombia, an interest in rescuing the properties of the geometric site for the conics is evident. This concept has been minimized due to the treatment being given in classrooms, where the teaching of equations and algorithms is prioritized, leaving aside the geometric-spatial component and the cognitive processes of an intuitive and empirical type characteristic of these figures. An interesting strategy to prioritize the geometric places of conics is to use the concept of metrics (way of measuring). Thus, it is proposed to design a series of didactic situations that privilege this strategy in order to answer the question: How does the design of didactic situations from different metrics influence the learning of conics as a geometric place? In this direction, this work presents some of the results obtained in the preliminary phase of the research called: Didactic Situations for Learning Conics from the concept of Metrics, which is being developed in the Master's program in Mathematics Education. In this phase, a pilot project was carried out with a didactic situation entitled: "Measuring in the city" where from the taxicab metrics problems of spatial locations must be solved, this with the aim of having a first approach to the type of analysis handled by students and to describe possible obstacles in the development of the activity.

**Keywords:** Conics, Metrics, Spatial thinking, Didactic situation

## **Introducción**

El aprendizaje de las cónicas dentro del marco de la educación colombiana estaba enfocado desde la perspectiva de los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) de la siguiente forma “conoce las propiedades geométricas que definen distintos tipos de cónicas [...] y las utiliza para encontrar las ecuaciones generales de este tipo de curvas” (Ministerio de Educación Nacional -MEN- 2015, p. 92); pero en la nueva versión de los DBA el enfoque respecto a este objeto matemático se menciona como “Explora y describe las propiedades de los lugares geométricos y de sus transformaciones a partir de diferentes representaciones” (MEN, 2016 p. 78).

En la actualización de los DBA se evidencia un interés en rescatar las propiedades de lugar geométrico de las cónicas; el lugar geométrico se venía minimizando debido al tratamiento que se le estaba dando en las aulas, en donde se priorizaba la enseñanza de ecuaciones y algoritmos y se asociaban representaciones gráficas como definiciones dejando de lado el componente geométrico-espacial y los procesos cognitivos de tipo intuitivo y empírico característico de estas figuras o lugares geométricos en el plano, esto se dio porque:

Las reformas de las matemáticas escolares [...] eliminaron la geometría como curso paralelo al álgebra; relegaron los temas geométricos para el final de los programas [...] y trataron de reemplazar las pruebas de tipo sintético por elegantes pruebas de tipo algebraico [...] o de tipo analítico que aprovechan propiedades de las funciones utilizadas para describir los lugares geométricos. (Vasco, 2006, p.27)

Según Bonilla, González y Chavarro, (2014) “cuando el discurso matemático escolar da prioridad a las ecuaciones cartesianas que las describen (a las cónicas), [...] promueve la pérdida de su estructura como lugar geométrico.” (p. 666). Una estrategia interesante para priorizar los lugares geométricos de las cónicas es usar el concepto de métrica (forma de medir) (Fernández (2011),

Valdivia & Parraguez (2012), Bonilla (2012), Cárdenas & Parra (2013) Bonilla, González & Chavarro (2014), Loiola & Costa (2015) y Antonio & Garzón (2017)), entonces surge una pregunta interesante de estudio: ¿Cómo lograr este aprendizaje?

En este aspecto, se encontró que la Teoría de las situaciones didácticas puede ser uno de los marcos teóricos idóneo para dar respuesta al interrogante, y tomando como hipótesis que el aprendizaje de un estudiante se da por adaptación a un medio (Brousseau, 2007) pues dentro de las situaciones que el maestro planea no especifica al estudiante el conocimiento esperado si no busca que él experimente, explore, formule y valide dicho conocimiento, algo poco visto en la educación tradicional, así, se propone diseñar una serie de situaciones didácticas que privilegien esta estrategia para poder responder a la pregunta concreta: ¿Cómo influye en el aprendizaje de las cónicas como lugar geométrico, el diseño de situaciones didácticas desde diferentes métricas? En esta dirección, en el presente trabajo se exponen algunos de los resultados obtenidos en la fase preliminar de la investigación denominada: *Situaciones Didácticas para el Aprendizaje de las Cónicas desde el concepto de Métrica*, que se está desarrollando en el programa de Maestría en Educación Matemática de la Uptc.

Como parte de la fase preliminar de la investigación, se desarrolló un pilotaje con una situación didáctica titulada: *Midiendo en la ciudad* donde a partir de la métrica del taxi el estudiante soluciona problemas realizando diferentes ubicaciones espaciales en los planos de una ciudad organizada (idealmente) por calles y carreras, basándose en pistas adaptadas según las definiciones de lugar geométrico de las cónicas. Esta situación fue aplicada a estudiantes de Grado Once del Colegio Coopteboy de la ciudad de Tunja, y todo el desarrollo de la situación didáctica se realizó utilizando medios virtuales (plataforma Moodle y Zoom), con el objetivo de tener un primer acercamiento al tipo de análisis y razonamiento manejado por los estudiantes al construir el concepto de lugar geométrico de la cónica, y de igual forma llegar a evidenciar posibles obstáculos

presentes en la actividad para determinar en qué medida la situación con el uso de la métrica del taxi beneficia el aprendizaje.

## **Referentes teóricos**

### **Teoría de las situaciones didácticas**

Para el diseño de la investigación, el marco teórico a utilizar será la teoría de las situaciones didácticas propuesto por Brousseau (2007), una situación didáctica hace referencia a la interacción intencional entre saber, profesor, alumno y medio, donde hay una voluntad de parte del docente por enseñar y se crea un medio (situación) para que el estudiante adquiera el saber determinado, en este orden de ideas también está implícito las situaciones a-didácticas que pone en manifiesto que un estudiante "no habrá adquirido verdaderamente un conocimiento hasta no ser capaz de utilizarlo en situaciones que encuentre fuera de todo contexto de enseñanza y en ausencia de cualquier indicación intencional" (Brousseau, 2007, p. 31). Al momento de trabajar las situaciones didácticas se deben tener en cuenta cuatro momentos: la situación acción, que consiste básicamente en que el estudiante trabaje individualmente con un problema, la situación de formulación que consiste en un trabajo en grupo, la situación de validación donde se pone a juicio de un interlocutor el producto obtenido de esta interacción y finalmente la institucionalización en donde los estudiantes ya han construido su conocimiento y, simplemente, el docente retoma lo efectuado hasta el momento y lo formaliza.

### **Las Cónicas como lugar geométrico**

Recurriendo a las definiciones presentadas por Lehmann (1992), las secciones cónicas pueden ser descritas mediante sus lugares de geometría en el plano:

*La circunferencia es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que se conserva siempre una distancia constante de un punto fijo de ese plano (p.99).*

*La parábola es el lugar geométrico de un punto que se mueve en el plano de tal manera que su distancia de una recta fija, situada en el plano, es siempre igual a su distancia de un punto fijo del plano y que no pertenece a la recta. (p. 149)*

*La elipse es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos es siempre igual a una constante, mayor que la distancia entre los dos puntos. (p. 173).*

*La hipérbola es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del plano, llamados focos, es siempre una cantidad constante, positiva y menor que la distancia entre los focos. (p. 191)*

Teniendo en cuenta las anteriores definiciones, se pueden trabajar estrategias de medición diferentes a la usual (medición euclidiana) para encontrar la expresión geométrica de las cónicas en el plano cartesiano, siendo una estrategia favorable para reforzar el pensamiento geométrico- espacial en los estudiantes.

### **La métrica del taxista**

Analicemos una nueva forma de medir basándonos en la distancia que recorre un taxista o un caminante en una ciudad ordenada y bien planificada, aunque difícil de encontrar, donde los caminos van de Norte a Sur, de Sur a Norte (Calles), de Oeste a Este y de Este a Oeste (Carreras). Desde este punto de vista no está permitido el desplazamiento en diagonal, dado el hecho que no se puede atravesar por las cuadras que componen la ciudad, sino exclusivamente por sus calles y carreras, como lo hace un taxista en su labor diaria. Por ejemplo analicemos la distancia entre los dos puntos que se muestran en la imagen.

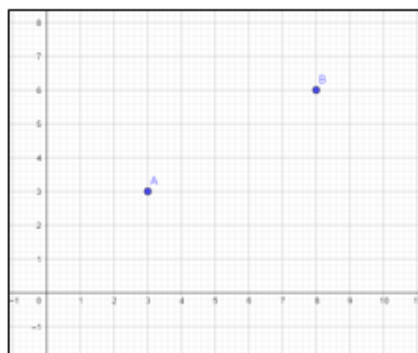


Ilustración 1 Ubicación espacial de dos puntos en el plano cartesiano, recreados en software Geogebra. Fuente: El autor

En la imagen se denota el Punto A de coordenadas (3,3) y el Punto B de coordenadas (8,6), para este caso la distancia usual sería la magnitud del segmento que une los dos puntos y se calcularía por  $d(A, B) = \sqrt{(8 - 3)^2 + (6 - 3)^2} \approx 5,83$  unidades, pero en la métrica del taxista solo podríamos medir con movimientos horizontales y verticales, como se muestra a continuación:

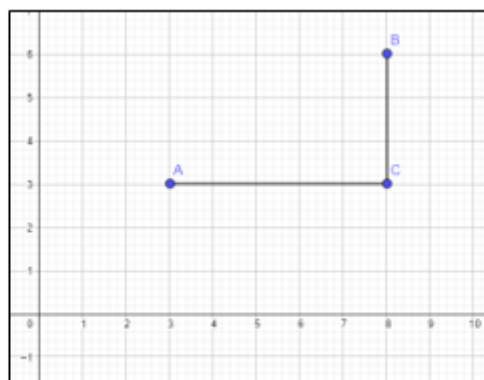


Ilustración 2 Medición de distancia por medio de la métrica del taxi. Fuente: El autor.

La distancia por medio de la métrica del taxi, está determinada por la suma de las longitudes de los segmentos  $\overline{AC}$  y  $\overline{BC}$  que serían respectivamente 5 unidades y 3 unidades por lo cual la distancia entre los puntos A y B por la métrica del taxi es 8 unidades.



## **Metodología**

El paradigma que adopta esta investigación es el cualitativo ya que “busca comprender la complejidad de los salones de clase para transformarlos” (Jiménez, 2019, pág. 122), por lo que un estudiante es un ser social y aprende la mayor parte de las matemáticas en el aula junto con sus compañeros y otros actores en los que se incluye el docente (Kilpatrick, 1992); el marco metodológico que adopta este trabajo es el de Ingeniería Didáctica (Artigue, Douady, Moreno & Gómez, 1995), esta metodología se compone de cuatro fases, una primera relacionada con los análisis preliminares donde se estudian los obstáculos de tipo epistemológico, cognitivo y didáctica que conllevan el objeto matemático cónica, una segunda fase relacionada con un análisis a priori donde se diseñan las respectivas situaciones didácticas y se busca precisar lo que se espera que el estudiante realice, la tercera fase de aplicación y una última fase de análisis a posteriori donde se comparan los resultados obtenidos de la situación frente a los planteados en la fase dos, se validan los resultados y se determina en qué medida construyó el estudiante el conocimiento y como estas situaciones didácticas beneficiaron su aprendizaje.

La población directamente implicada en esta investigación son los estudiantes de grado Décimo del Colegio Coopteboy de la ciudad de Tunja, pero como un primer ejercicio investigativo se realizó un pilotaje con estudiantes de grado Once de esta misma institución, para analizar diferentes variables entre ellas la aceptación y acogida de la situación didáctica, tener un primer acercamiento al tipo de análisis y razonamiento manejado por los estudiantes al construir el concepto de lugar geométrico de la cónica, determinar en qué medida la situación con el uso de la métrica del taxi benefició el aprendizaje y de igual forma llegar a evidenciar posibles obstáculos presentes en la actividad para poder corregir en la aplicación definitiva con los estudiantes de grado Decimo.

La situación didáctica se aplicó en una sesión de clase de 2 horas por medio de la plataforma Zoom y la plataforma Moodle, la fase de acción duro 45 min, la fase

de formulación 30 min y la fase de validación 45 min, la fase de institucionalización por su parte se aplicó en la siguiente sesión de clase y duro aproximadamente 30 min; en la situación participaron 26 estudiantes entre las edades de 16 años y 18 años quienes debían llegar a la sesión de zoom con el archivo pdf descargado (de la plataforma Moodle) en sus equipos móviles o computadores, con la finalidad de agilizar el proceso de aplicación de la situación didáctica, es de mencionar que la mayoría de estudiantes no tienen una conexión de internet estable por lo que en ocasiones debían desactivar las cámaras para poder continuar en la clase, y parte de la observación investigativa se vio perjudicada por esta situación ya que no se realizaba un seguimiento a detalle de lo que realizaban los estudiantes, quizás la fuente más importante de análisis fueron las respuestas y argumentaciones que ellos enviaron a la plataforma Moodle después de terminar la actividad en sus respectivas guías de trabajo y las participaciones e intervenciones que cada uno de ellos realizaba en el transcurso de la sesión de clase.

### **Desarrollo**

Como la situación aplicada constituye un primer acercamiento al diseño de situaciones didácticas que serán trabajadas por medios virtuales (plataforma Zoom), en este pilotaje se dará prioridad a los sucesos que favorecen y perjudican la ejecución de la situación didáctica, se desarrollara un análisis a la forma en que el estudiante aprende y se estudiara la pertinencia de los medios de aplicación para desarrollar la investigación, a continuación se desarrolla cada una de las fases de la ingeniería didáctica:

### **Fase de Análisis Preliminar**

Se describe de forma breve las tres dimensiones que constituyen esta fase (dimensión epistemológica, dimensión cognitiva y dimensión didáctica) que sirvieron de base para el diseño de la situación. En la dimensión epistemológica (Boyer, 1996) se expone una génesis histórica de como el objeto cónica tuvo

diversas concepciones a lo largo del tiempo, pues se argumenta que estas nacieron en la antigua Grecia desde diferentes secciones obtenidas del corte entre un plano y un cono (de ahí el nombre de Cónica), muchos años después se encontraron diversas propiedades geométricas estudiando las cónicas desde una visión puntual (lugar geométrico) y el tercer suceso importante de este objeto matemático se dio cuando en el siglo XVI estas propiedades geométricas fueron relacionadas por medio de ecuaciones desarrollándose lo que sería la Geometría Analítica.

Frente a la dimensión cognitiva es evidente que las cónicas pueden ser vistas desde tres percepciones, como secciones de un cono, como lugar geométrico y como ecuaciones canónicas, nótese que el nacimiento de este tipo de curvas se dio en ambientes puramente geométricos, pues es indudable su naturaleza, primero desde una visión tridimensional luego más a detalle desde una visión bidimensional, pero no fue sino hasta quince siglos después que se comenzó a dar un tratamiento algebraico fuerte, desde esta visión cognitiva se nos revela el estado de la enseñanza de este objeto matemático, lo que permite analizar la dimensión didáctica (Vasco, 2006) en donde se priorizó el tratamiento de las cónicas desde las ecuaciones y las propiedades geométricas tanto bidimensionales como tridimensionales fueron relegadas a un segundo plano.

### **Fase de Análisis a priori**

#### **Diseño de situación**

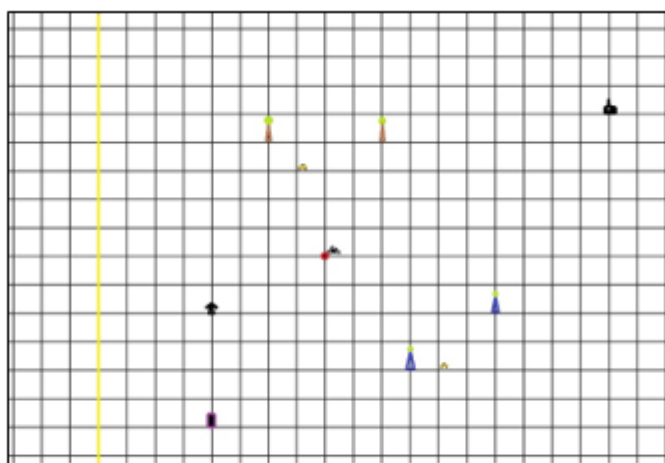
Teniendo presente el análisis preliminar, la investigación busca rescatar las propiedades geométricas de las cónicas por medio del diseño de situaciones didácticas que prioricen su lugar geométrico, una de las estrategias utilizadas fue manipulando la métrica del taxi, por tal razón variando la forma de medir se quiere analizar ¿Cómo el estudiante investiga dichas propiedades?, para lograr esto se diseñó la siguiente situación didáctica (Es de aclarar que en sesiones

anteriores se había trabajado con los estudiantes de grado Once el concepto de métrica del taxi )


### **Midiendo en la Ciudad<sup>1</sup>**

1. Lee las siguientes situaciones y para cada caso ubica los puntos que consideres que satisfacen el enunciado.

*En la ciudad se encuentra un hombre con su moto (Punto rojo) preguntando por la gasolinera más cercana, a lo cual una persona le responde "queda a 5 cuadras de aquí" ¿a qué posibles lugares se puede desplazar el motociclista?*



*Ilustración 3 Plano de Ciudad del taxi Fuente: el autor*

*En la misma ciudad un estudiante busca un apartamento que cumpla las siguientes condiciones: la distancia del apartamento a la universidad (  ) debe ser igual a la distancia del apartamento a la avenida (de amarillo), ¿cuáles son los posibles lugares donde el estudiante podrá tomar en arriendo el apartamento?*

---

<sup>1</sup>Situaciones didácticas adaptadas de Camacho, W. [willyswac]. (2011). Métrica del taxista [Archivo de video]. Recuperado de [https://www.youtube.com/channel/UCIhtKu\\_GJOawICMDVPizWOA](https://www.youtube.com/channel/UCIhtKu_GJOawICMDVPizWOA)

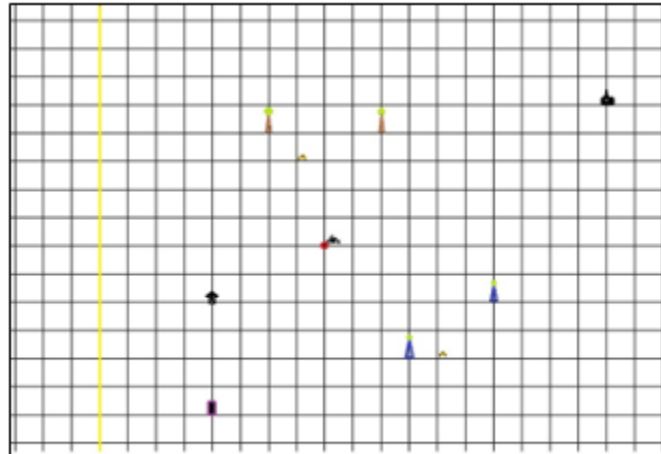



Ilustración 4 Plano de Ciudad del taxi Fuente: el autor

En la ciudad existen 2 antenas emisoras de señal para los taxis (  ) las cuales funcionan de la siguiente forma: un taxi solo recibirá señal si al sumar las distancias del taxi a cada antena el resultado es de 6 cuadras ¿en qué puntos el taxi captara la señal?

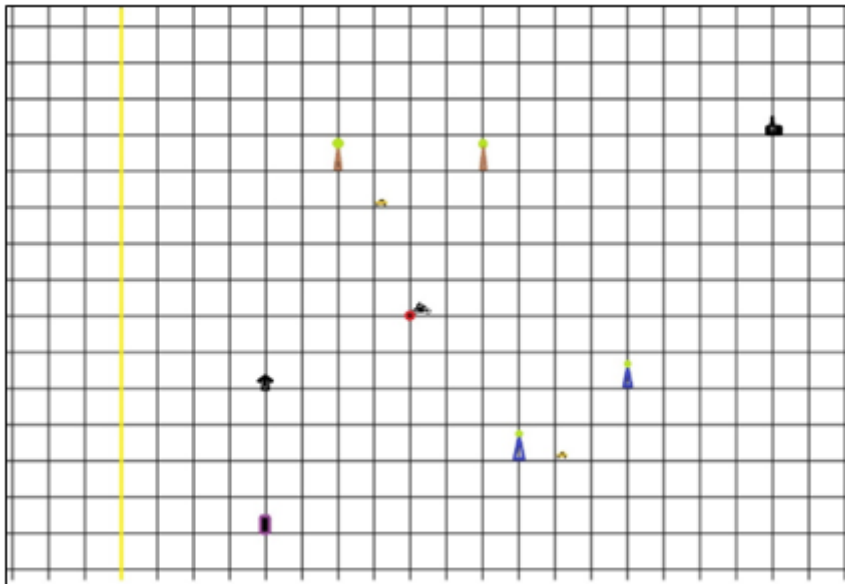

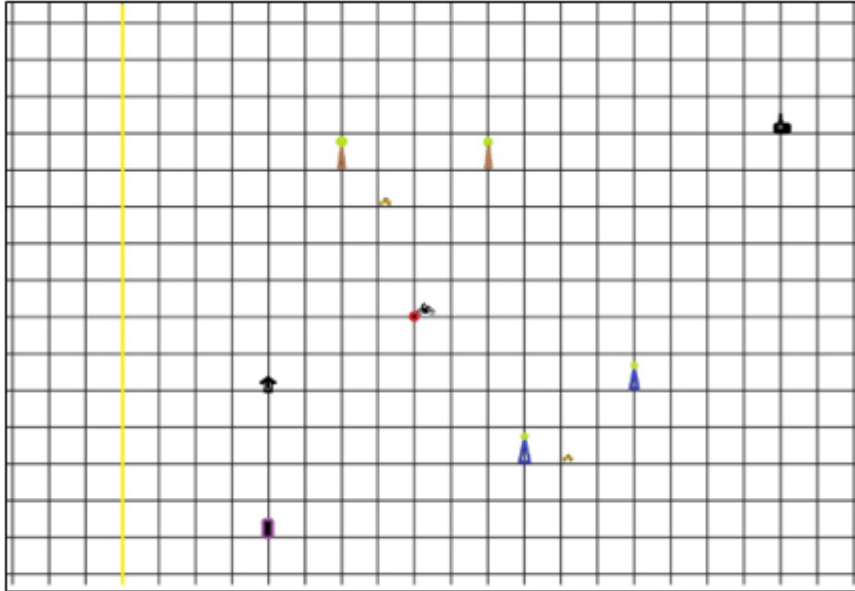


Ilustración 5 Plano de Ciudad del taxi Fuente: el autor

Para mejorar la comunicación telefónica en la ciudad se instalaron 2 antenas (  ) pero estas tendrían interferencia cuando al hacer la diferencia entre las

*distancias de un determinado lugar a las dos antenas de como resultado 3  
cuadras ¿en qué lugares hay interferencia?*



*Ilustración 6 Plano de Ciudad del taxi Fuente: el autor*

2. Comparte los resultados que obtuviste con algún compañero y de forma grupal analicen los siguientes cuestionamientos.

¿Los resultados son los mismos?

¿De qué forma analizo tu compañero las situaciones?

¿Encuentras alguna semejanza entre las situaciones propuestas y el concepto de lugar geométrico?

¿con que lugar geométrico podrías relacionar a cada situación (primer punto)?

¿podrías describir de una manera formal estos lugares geométricos?

3. Por grupo lleguen a un consenso de la solución correcta de la situación y en la sesión virtual por Zoom socialicen sus resultados a los demás compañeros de

la clase, demuestren y comprueben que sus resultados son la forma adecuada de dar solución a las situaciones planteadas.

### **Análisis a priori**

Se expone a continuación lo que se espera del desarrollo de la situación

*Fase de Acción: Búsqueda de lugares de la ciudad que satisfacen los enunciados (Punto 1)*

Se espera que el estudiante ubique puntos en el plano de la ciudad (ciudad bien organizada en calles y carreras) que satisfagan cuatro enunciados relacionados con el concepto de lugar geométrico de las cónicas, estos enunciados están redactados en contexto a ubicaciones en la ciudad mas no a su definición formal de lugar geométrico.

*Fase de Formulación: Socializa los resultados con otro compañero (Punto 2)*

En esta fase se espera que el estudiante socialice las respuestas con un par, analizando 5 cuestionamientos, los dos primeros relacionados con entender los resultados del otro estudiante, y los siguientes tres cuestionamientos relacionados con el análisis del lugar geométrico y una formalización del mismo, en esta fase se pretende que el grupo de estudiantes (pareja) desarrolle una aproximación a la matemática formal de la definición de lugar geométrico de las cónicas, para poder precisar el nivel de abstracción del estudiante cuando trata de representar una situación semireal a un lenguaje simbólico.

*Fase de validación: Exponiendo los resultados a una comunidad más grande (Punto 3)*

Finalmente en una socialización con todos los estudiantes de la clase se deben exponer los resultados obtenidos en los diferentes grupos y confrontar las soluciones hasta llegar a una validación del conocimiento.

### *Fase de Institucionalización*

En la siguiente sesión de clase, tomando como punto de partida la validación (de la fase anterior) se formaliza el concepto lugar geométrica de la cónica desde la métrica del taxi.

Como la teoría didáctica que apoya la investigación es la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau, esta situación didáctica (Midiendo en la ciudad) está diseñada intencionalmente para que el estudiante aprenda "adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, dificultades y desequilibrios" (Brousseau, 2007, p. 30) este medio que se conoce como situación no solo debe garantizar la interacción entre el estudiante con el saber, si no también contemplar "todo entorno incluidos el docente y el sistema educativo" (Brousseau, 2007, p. 18).

### **Fase de Ejecución**

La ejecución de la actividad fue por medio de la plataforma Zoom, cada uno de los estudiantes tenía previamente descargado en sus equipos la guía de trabajo pdf, por motivos de conectividad inestable varios estudiantes no podían encender la cámara así que en general se pidió que todos escribirán la forma en que abordaban los problemas propuesto y tan pronto terminaran la fase de acción tenían que cargar los resultados a la plataforma Moodle, la primera fase tuvo una duración de 45 min, luego para la parte grupal en parejas (punto 2) se pidió que trabajaran con su respectivo compañero vía WhatsApp, para comunicar los resultados y de forma similar que la primera parte al cabo de 30 min debían subir a la plataforma los resultados.

Para la fase de validación, mi función como docente fue ser moderador y proponer preguntas problematizadoras para fomentar el debate en la sesión de zoom para que los diferentes grupos argumentaran ¿Cómo desarrollaron las situaciones? Y ¿Por qué la forma que escogieron para desarrollar las situaciones es la adecuada?, el resultado final de este debate era llegar a una formalización



simbólica o verbal de las cónicas desde la métrica del taxi, esta fase duro aproximadamente 45 min. En la siguiente sesión se desarrolló la fase de institucionalización.

### **Fase de Análisis a posteriori**

Para la fase de acción se pudo detallar que existieron varios obstáculos en la ubicación de los lugares geométricos, la confusión estuvo determinada porque se malinterpretó el plano de la ciudad y la mayoría de estudiantes creían que los enunciados hacían referencia a algunos sitios específicos que estaban simbolizados con figuras, por esta razón se limitaron a ubicar algunos puntos y no permitió obtener la visualización geométrica de ninguna de las cónicas.

<p>Si tomamos al motociclista como referencia, él no va a llegar a ningún dibujo (ya sea gasolina o alguien que le ayude) porque mínimo se necesitan 6 pasos para llegar a algo entonces:</p> <ol style="list-style-type: none"><li>1. Si se mueve 4 a la izquierda y uno hacia abajo solo es caminar una última unidad para llegar a lo que parece una estación de color negro</li><li>2. Si se mueve 3 unidades hacia arriba y una a la izquierda llega donde un polaga que le ayuda a llevar la moto (desde donde están), una unidad más a la izquierda y una hacia arriba para llegar a lo que parece ser un árbol</li><li>3. Si se desplaza 4 unidades hacia arriba y una hacia la derecha le tocaría caminar una última cuadra para llegar a lo que parece ser otro árbol.</li><li>4. El motociclista se podría desplazar 4 unidades hacia abajo y mover una a la derecha y arrastrar la moto dos cuadras más hasta llegar a lo que parece ser una bomba de gasolina azul</li></ol>	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Desplazando el taxi una unidad a la izquierda o (dos o tres) a la derecha ¿Por qué no 1 a la derecha? Porque nos daría 5 unidades y no sirve.</li><li>2. Cabe destacar que si utilizamos el principio del espejo (o sea que si tenemos de referente las antenas como espejo, al reflejar la posición del taxi aplicaría las mismas proporciones que tiene el anterior numeral) también aplica con la siguiente ubicación.</li><li>3. Nos posicionamos en el taxi y nos movemos 1 unidad a la derecha y 1 hacia abajo nos da una delgada señal ya que si sumamos nos da 2 hacia arriba y 4 de conexión en las antenas formando una especie de T porque si analizamos bien en realidad nos llevaría por dos caminos. El que acabo de explicar (el de la T) y uno en forma de U que nos daría un total de 8 unidades recorridas. Pero porque es válido? Porque a pesar de todo, con la T, cumple con la condición de tener 6 unidades entre las dos torres.</li></ol>
---	---

*Ilustración 7 Análisis de estudiante al problema 1 y 3 del plano.*

En la ilustración 7, por lo que se argumenta se puede deducir que hay comprensión de la situación planteada pero el error radica en que no se ha comprendido correctamente las convenciones del plano y se pensó que estas convenciones hacían parte del problema.

Otra respuesta interesante en la fase de acción fue la que se muestra en la ilustración 8, se deduce que el estudiante con un registro verbal comprendió en gran medida la ubicación de la parábola

La más razonable me parece que es el punto que se encuentra entre la avenida y la universidad ya que para llegar a ambos hay una distancia de dos unidades, la otra es una variable principal. Se ubica el punto 4 unidades arriba de la universidad ya que si se comienza a ubicar más puntos hacia la derecha se va a conservar la propiedad de que se mantenga misma distancia desde el arriendo hasta la avenida y su universidad pero esto solamente si lo hace hacia la derecha, lo mismo pasa si ponemos el punto clave 4 unidades hacia debajo de la U

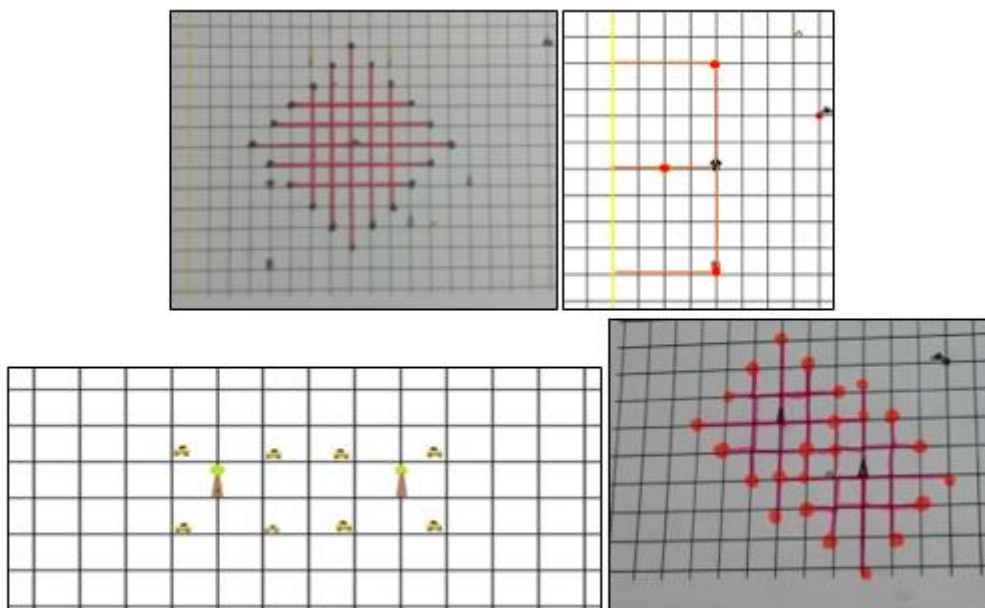
*Ilustración 8 Registro verbal de parábola en métrica del taxi*

Ahora bien para el problema de interferencias (hipérbola) una respuesta interesante en la fase de acción se evidencia en la ilustración 9, donde el estudiante detalla de cierto modo la hipérbola, además aparte de utilizar un lenguaje verbal desarrolla una aproximación grafica de lo que quiere expresar.



*Ilustración 9 Aproximación a la hipérbola en la métrica del taxi.*

Para las fases de formulación y validación, en forma general hubo una aproximación geométrica a las cónicas como se evidencia a continuación:



*Ilustración 10 Aproximación geométrica a las cónicas desde la métrica del taxi (Fase Grupal).*

En la fase de validación fueron muy pocos los estudiantes que participaron, los otros estudiantes argumentaron que aunque entendieron como medir con la métrica del taxi, los enunciados (de los lugares geométricos) eran muy confusos, uno de los estudiantes opinó lo siguiente *"Claramente puede ser pertinente utilizar esta técnica (métrica del taxi) en un curso de geometría ya que es muy sencilla y útil, además me parece que es una táctica didáctica muy fácil de aprender por la manera en que se utiliza y por su nombre, ya que fácilmente se asocia con cuestiones cotidianas"*, en la validación solo se logró obtener a detalle la gráfica de la circunferencia y la elipse, mientras que de la parábola y la hipérbola solo se ubicaron algunos puntos; ya en la fase de institucionalización se tomaron los resultados obtenidos por los estudiantes y se formalizaron los enunciados de lugares geométricos de las cónicas con un lenguaje más técnico.

## **Conclusiones**

La aplicación de la situación de pilotaje permitió destacar varios aspectos para tener en cuenta en el diseño de las situaciones definitivas y en general para el marco metodológico de la siguiente manera:

- Hay que replantear la situación didáctica debido a que en la fase de acción provocho en la mayoría de estudiantes confusión por las diferentes convenciones inmersas en los planos y por la redacción en los enunciados de cada problema.
- Aparte del registro gráfico que era el esperado por la actividad, los estudiantes desarrollaron el registro verbal donde se denotaron argumentaciones interesantes que dan razón de la importancia de este tipo de actividades en el fortalecimiento del razonamiento espacial.
- Indudablemente la fase de formulación y validación ayudo a varios estudiantes a organizar mejor sus ideas y replantear las construcciones desarrolladas inicialmente en la fase de acción.
- Aunque no se llegó a un planteamiento formal (simbólico) de los lugares geométricos, el grupo pudo formular aproximaciones verbales a la definición del lugar geométrico de las cónicas en la fase de validación del conocimiento.
- La investigación por medio de interacción virtual entre estudiantes y profesor resulto ser dificultosa, ya que hay varios factores que no permiten tener un acercamiento detallado a la forma en que un estudiante aborda la situación didáctica (problemas de conectividad), es decir que hay que replantear aspectos desde el marco metodológico para obtener resultados más certeros de investigación.

## **Bibliografía**

Antonio, J., & Garzón, C. (2017). Estudio Geométrico y Analítico de las Cónicas

en algunas Métricas (Tesis de pregrado). Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Tunja, Colombia.

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., & Gómez, P. (1995). Ingeniería didáctica en educación matemática.

Bonilla, B., González, P., & Chavarro, S. (2014). Las cónicas en la geometría del taxista: una propuesta didáctica desde la teoría de los modos de pensamiento. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 27, 666-673

Bonilla, D (2012). La Elipse desde la perspectiva de la Teoría de los Modos de Pensamiento. (Tesis de maestría). Pontificia Universidad católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile.

Boyer, C. (1996). Historia de la Matemática (M. Martínez, Trad.). Madrid, España: Alianza Editorial. (Trabajo original publicado en 1968).

Brousseau, G. (2007). Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas/Introduction to study the theory of didactic situations: Didactico/Didactic to Algebra Study (Vol. 7). Libros del Zorzal.

Fernández-Mosquera, E. (2011). Situaciones para la Enseñanza de las cónicas como lugar geométrico desde lo puntual y lo global integrando Cabri Géomètre II Plus (Tesis de maestría), Universidad del Valle.

Izquierdo, C. & Ardila, P. (2013). Estudio de la métrica de manhattan. Segmentos, rectas, rayos, circunferencias y algunos lugares geométricos en la geometría del taxista. (Tesis de Pregrado) Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá.

Jiménez-Espinosa, A. (2019). La dinámica de la clase de matemáticas mediada por la comunicación. *Revista de Investigación, Desarrollo e Innovación*, 10(1), 121-134.

Kilpatrick, J. (1992). A history of research in mathematics education. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics*. Macmillan Publishing Co, Inc.

Lehmann, C. (1992). Geometría Analítica. México: LIMUSA.

Loiola, G., & Costa, S. (2015). As Cônicas na Geometria do Taxi. *Ciência e Natura. Revista do Centro de Ciências Naturais e Exatas - UFSM*, p.179–191.

Ministerio de Educación Nacional, (2015). Derechos básicos de aprendizaje. Matemáticas. V1: El ministerio.

Ministerio de Educación Nacional, (2016). Derechos básicos de aprendizaje. Matemáticas. V2: El ministerio.

Valdivia, C., & Parraguez, M. (2012). Evolución cognitiva del concepto parábola como lugar geométrico: una mirada desde la teoría APOE. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 25*. p. 593-601.

Vasco, C. E. (2006). Didáctica de las matemáticas: artículos selectos. U. Pedagógica Nacional.